Fourier analysis and lattice point problems

著者	Kuratsubo Shigehiko
内容記述	Thesis (Ph.D. in Science)--University of Tsukuba, (B), no. 948, 1994.2.28
発行年	1994
URL	http://hdl.handle.net/2241/5251

【194】

氏　名(本　籍)	くら　つぼ　しげ　ひこ 倉　坪　茂　彦（青森県）
学位の種類	博　　士（理　　学）
学位記番号	博　乙　第　948　号
学位授与年月日	平成 6 年 2 月 28 日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
審査研究科	数　学　研　究　科
学位論文題目	FOURIER ANALYSIS AND LATTICE POINT PROBLEMS （フーリエ解析と格子点問題）

主　査	筑波大学教授	理学博士	内　山　三　郎
副　査	筑波大学教授	理学博士	木　村　達　雄
副　査	筑波大学教授	理学博士	中　川　良　祐
副　査	筑波大学教授	理学博士	保　科　隆　雄

論　文　の　要　旨

本論文の目的は，古い歴史をもつ数学の二つの分野，フーリエ解析と解析的整数論，とくに多変数フーリエ級数の収束問題と整数論における格子点問題との間に存在する密接な関連性について論じ，いくつかの新しい結果と既知の諸結果の改良を得ることである。

関数空間L”（T”）の元fのフーリエ級数S〔f〕の Bochner-Riesz 総和可能性を考察するとき，S〔f〕の　Bochner-Riesz 平均の積分表示に現われる核の形を見ると，それは多次元の空間における球あるいは楕円体に含まれる格子点についての和であり，これにより，多次元球あるいは多次元楕円体に含まれる格子点の個数に関するある種の自然な重みを許す「格子点問題」との関連が自ら明かとなる。

著者は，先ず，フーリエ級数S〔f〕の Bochner-Riesz 平均の収束に関する2つの問題，即ち，そのノルム収束および概収束の問題を定式化し，ノルム収束に関する C. Fefferman の問題（1974）に対してこれを否定的に解決し，更に概収束に関する E. M. Stein の定理（1958）を補完する結果を得た。ここでは，与えられた半径をもつ超球内の格子点の個数に対する下からの評価を与える C. L. Siegel（1935）らによる古典的な結果が重要な役割を果たしている。著者はまた，フーリエ級数S〔f〕の Bochner-Riesz の強総和可能性に関する Stein の定理（1958）に対して，もし Stein の条件が満たされないならば，その結果は成立しないことを，定量的かつ具体的に示している。

これらの議論において，著者は，Epstein ゼータ関数あるいは基本指数関数を係数にもつ一般化された Epstein ゼータ関数の取扱いが重要な意味をもつことを指摘し，B. Novák の定理（1970）の自然な形の拡張を得た。これらは，多変数フーリエ解析の整数論への応用と見做されるものである。

n 変数の特殊三角級数$\Sigma_m |m|^{-\sigma} e(mx)$は，フーリエ級数の総和法の研究において重要な意味をもつものである。$n=1$ならば，この級数は$2\Sigma_m m^{-\sigma}\cos(2\pi mx)$に等しく，$0<\sigma<1$の場合にその性質はとくに重要である。一般の$n\geqq 1$に対して M. J. Kohn（1968）は上の特殊三角級数に対して，$n-1<\sigma<n$のときに成立する一つの評価式を与えたが，著者は，$n\geqq 4$ならば，全く同一の結果が$n-2<\sigma<n$のときに成立すること，および条件$n-2<\sigma<n$は最良であることを示した。

一般の超楕円体に関する格子点問題について著者が得た主要な結果は次のものである。$Q=Q(u_1\ldots, u_n)$（$n\geqq 4$）を正定値の2次形式とし$M_j>0$，b_j（$1\leqq j\leqq n$）を与えられた実数とする。実数の組$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$に対して

$$A(x;\alpha)=\Sigma_m e(\Sigma_j(m_jM_j+b_j)\alpha_j)$$

とおく。ここに和Σ_mは

$$Q(m_1M_1+b,\ldots, m_nM_n+b_n)\leqq x$$

を満たす整数の組$m=(m_1,\ldots, m_n)$の上に亘る。B. Novák（1967/68）は，Qの係数，M_j，b_jがすべて整数のとき，殆どすべてのαに対して$A(x;\alpha)=O(x^{n/4}(\log x^{3n})$であることを示しているが，著者は，より一般に，Qの係数，M_j，b_jは任意の実数としてよく，しかも殆どすべてのαと任意の$\varepsilon>0$に対して$A(x;\alpha)=O(x^{n/4}(\log x)^{3/2+\varepsilon})$
が成立つことを証明した。

更に著者は，基本指数関数を重みにもつ，超球内の格子点に関する和と積分との差に対する K. I. Babenko の評価（1978）を一様化し，そこにおける Babenko の冗句「殆どすべての x について」を極めて決定的な「すべての x について」によって置き換え，証明することに成功した。

審　査　の　要　旨

多変数フーリエ級数の収束問題と一般化された格子点問題のかかわりの研究において得られた著者の結果は，すべて深くかつ美しい。

フーリエ級数 S〔f〕の強総和可能性に関する Stein 定理の補完，および一般化された Epstein ゼータ関数の各点評価に関する Kohn の定理の成立条件の精密化は重要な意味を有する。また，一般の超楕円体に関する格子点問題における著者の結果は，その一般性と精密さに拘らず，証明の基本的な着想の簡明・単純なることにおいて，内外の多くの専門家の注目を集めているところである。

また，Babenko の定理において，その成立のための例外集合が，結局，零集合ではなく空集合であること，を証明することに成功したことは，整数論的方法の卓越性を示したものであって，従来の単なる実解析的方法では決して到達することのできなかった一つの頂点であった。

よって，著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。